(A)

Equation de Hill-Mathieu

Leçons : 220, 221

Réf. : Zuily, Queffélec, Analyse pour l'agrégation p410 (4^e éd.)

Soit $\boxed{(E) : y'' + qy = 0}$ où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, π-périodique et paire.

Objectif : étudier l'existence de solutions bornées de (E)

1) Existence, unicité, espace des solutions

a°/ Soit $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

y vérifie $(E) \iff Y$ vérifie $(E') : Y' = A(\,)Y$

où $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est continue.

$x \mapsto A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix}$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, pour tout $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution globale $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de (E) t.q. $y(0) = a_0$ et $y'(0) = b_0$

b°/ L'ensemble W des solutions de (E) est alors un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de dimension 2.

Soit $y_1 \in W$ telle que $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$

$y_2 \in W$ —— $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$.

(y_1, y_2) est alors une base de W.

2) Introduction du morphisme de translation

Soit $M : W \to W$

$y \mapsto My : x \mapsto y(x + \pi)$

M est alors bien défini (car q est π-p.) et on identifiera M à $\mathrm{Mat}_{(y_1, y_2)} M$

Si on note $\Pi = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Pi y_1(x) = y_1(x+\pi) = a\, y_1(x) + b\, y_2(x)$

donc $\quad y'_1(x+\pi) = a\, y'_1(x) + b\, y'_2(x)$

et en évaluant en 0 dans ces deux égalités, on a :

$y_1(\pi) = a \times 1 + b \times 0 \Rightarrow \underline{a = y_1(\pi)}$

$y'_1(\pi) = a \times 0 + b \times 1 \Rightarrow \underline{b = y'_1(\pi)}$

De même, $\Pi y_2(x) = c\, y_1(x) + d\, y_2(x) \Rightarrow \underline{c = y_2(\pi)}$ et $\underline{d = y'_2(\pi)}$

d'où $\boxed{\Pi = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y'_1(\pi) & y'_2(\pi) \end{pmatrix}}$

On pose enfin $\underline{T = \mathrm{Tr}(\Pi) = a + d = y_1(\pi) + y'_2(\pi)}$

3) **Prop.** : a) y_1 est paire, y_2 est impaire et $\det \Pi = 1$

b) $a = d$, i.e. $y_1(\pi) = y'_2(\pi)$

a) • Soit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y_1(-x)$

$z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \; z''(x) + q(x)\, z(x) = y''_1(-x) + q(x)\, y_1(-x)$

On : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \; y''_1(x) + q(x) y_1(x) = 0 \\ y_1 \text{ est définie sur } \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \; y''_1(-x) + q(-x) y_1(-x) = 0$

et q est paire donc $z''(x) + q(x)\, z(x) = 0 \Rightarrow \boxed{z \text{ vérifie } (E)}$

De plus, $z(0) = y_1(0)$

$z'(0) = -y'_1(0) = -0 = 0 = y'_1(0)$

donc par unicité dans le théorème de C.L, $z = y_1$

donc $\boxed{y_1 \text{ est paire}}$

Le même raisonnement avec $x \mapsto -y_2(-x)$ nous donne que $\boxed{y_2 \text{ est impaire}}$

- Soit $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ le wronskien de (y_1, y_2)

$w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $w' = \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - \cancel{y_1' y_2'}$

$= -q\, y_1 y_2 + q\, y_1 y_2$

$w' = 0$

et w défini sur $\mathbb{R}$ (connexe) donc w est constant.

$w(0) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$

donc $\boxed{w(\pi) = \det \Pi = 1}$

b°/ On a $\Pi^{-1} : W \longrightarrow W$

$y \longmapsto \Pi^{-1} y : x \longmapsto y(x - \pi)$

donc $\Pi^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$ car y_1 paire $\Rightarrow y_1'$ impaire

et $\Pi^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\det \Pi}}_{=1} \times \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

donc $\boxed{a = d, \text{ i.e. } y_1(\pi) = y_2'(\pi)}$

4) Prop. a°/ $|T| < 2 \Rightarrow \forall y \in W$, y est bornée

b°/ $|T| = 2 \Rightarrow \exists y \in W$, y non bornée et $|T| = 2 \iff bc = 0$

c°/ $|T| > 2 \Rightarrow \forall y \in W, y \not\equiv 0$, y est non bornée.

a°/ $\chi_\Pi = X^2 - TX + 1$ (polynôme caractéristique)

Si $|T| < 2$, χ_Π admet deux racines complexes conjuguées ρ et $\bar{\rho}$.

$|\rho|^2 = \rho\bar{\rho} = \det \Pi = 1$ donc $|\rho| = 1$

Soit (u_1, u_2) base de W de $\vec{vp}$ de Π associés à ρ et $\bar{\rho}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\Pi u_1(x) = u_1(x + \pi) = \rho\, u_1(x)$
$\Pi u_2(x) = u_2(x + \pi) = \bar{\rho}\, u_2(x)$ $\Bigg\} \Rightarrow |u_j(x+\pi)| = |u_j(x)|$ $1 \le j \le 2$

donc $|u_1|$ et $|u_2|$ sont continues et π-périodiques donc bornées.

Donc, $\forall y \in W : \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = \alpha u_1 + \beta u_2$

donc $|y| \leq |\alpha|\,|u_1| + |\beta|\,|u_2|$

donc $\boxed{\text{toute solution de } (E) \text{ est bornée}}$

b°/ Si $|T| = 2 \Leftrightarrow T = \pm 2$. Alors $\chi_M = (X \pm 1)^2$

Soit $u \in W$ $\vec{vp}$ de M associé à ± 1.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x+\pi) = \pm u(x)$ donc comme au a°/ $\boxed{u \text{ est bornée (et non nulle...)}}$

De plus, $T = a + d = 2a = \pm 2 \Rightarrow a = \pm 1$

$\Rightarrow ad = a^2 = 1$

donc $\det M = 1 = ad - bc \Rightarrow bc = 0$.

Réciproquement, $bc = 0 \Rightarrow \underset{= a^2}{ad} = 1 \Rightarrow \underset{d}{\overset{}{a}} = \pm 1 \Rightarrow T = a + d = \pm 2$

donc $\boxed{|T| = 2 \Leftrightarrow bc = 0}$

c°/ Si $|T| > 2$, alors χ_M admet deux racines réelles $\rho_1, \rho_2 \notin \{\pm 1\}$

et $\rho_1 \rho_2 = 1$

donc χ_M admet deux racines réelles ρ et ρ^{-1} où $|\rho| > 1$

Soit (u_1, u_2) une base de $\vec{vp}$ associés.

$\forall y \in W, y \neq 0, \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha,\beta) \neq (0,0) \ / \ y = \alpha u_1 + \beta u_2$.

$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \ y(x + n\pi) = \alpha \rho^n u_1(x) + \beta \rho^{-n} u_2(x)$.

Par csq du théorème de C.L, $\exists \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} \in \mathbb{R} \ / \ u_1(x_1) \neq 0$ et $u_2(x_2) \neq 0$

Si $\alpha \neq 0$: $|y(x_1 + n\pi)| \sim |\alpha|\,|u_1(x_1)|\,|\rho|^n$ $n \to +\infty$

donc $\boxed{|y(x_1 + n\pi)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}$

Si $\beta \neq 0$: $|y(x_2 + n\pi)| \sim |\beta|\,|u_2(x_2)|\,|\rho|^{-n}$ quand $n \to -\infty$

donc $\boxed{|y(x_2 + n\pi)| \xrightarrow[n \to -\infty]{} +\infty}$

Donc, $\boxed{\text{toute solution non identiquement nulle de } (E) \text{ est non bornée}}$

Remarques

1) Cas $q = 1$

$$(E) : \quad y'' + y = 0.$$

On a $y_1 = \cos$, $y_2 = \sin$

$T = \cos\pi + \cos\pi = -2 \Rightarrow \exists$ sol° bornée

(elles le sont toutes en fait).

2) Cas $q = -1$

$$(E) : \quad y'' - y = 0$$

On a $y_1 = \cosh$, $y_2 = \sinh$

$T = \cosh(\pi) + \cosh(\pi) = 2\cosh(\pi) > 2$

$\Rightarrow$ aucune solution n'est bornée

3) L'équation de Mathieu est le cas $q(x) = a - 2b\cos(2x)$, rencontrée en étudiant les vibrations d'une membrane elliptique.

Le pendule paramétrique relève également de cette équation

4) On ne peut en général pas calculer explicitement les solutions.

Si $q(x) = \cos(2x)$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix}$ et la résultante $R(x) = \exp\left(\int_0^x A(t)\,dt\right)$

n'est pas calculable explicitement.

En revanche, si on peut approximer $T = y_1(\pi) + y_2'(\pi) \overset{3)\ b^\circ/}{=} 2y_1(\pi)$, on peut faire quelque chose. (méthode d'Euler par exemple)